

Разработка математической модели для анализа цифрового ядра

Евсеев Ф.А.^{1,2}; Иванов И.А.¹

¹Научно-аналитический центр рационального недропользования им. В.И. Шпильмана, г. Ханты-Мансийск

²Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск

E-mail: fedor_evseev@rambler.ru

ЦИФРОВАЯ МОДЕЛЬ КЕРНА

В рамках глобального проекта о цифровом месторождении важное значение имеет представление информации в числовом виде. Идея цифрового месторождения предъявляет серьезные требования к точности и объему данных, поэтому исследования горных пород традиционными методами требуют усовершенствования подходов к изучению ядра, повышающих точность оценки фильтрационно-емкостных свойств.

С помощью сравнительно нового для нефтяной отрасли метода рентгеновской микротомографии (РМТ), дополняющий и расширяющий возможности традиционного, появилась возможность оцифровать ядро, то есть построить его модель в цифровом виде (рис. 1) и, таким образом, численно описать его. Так, например, нередко рассматривается задача определения коэффициента проницаемости микрообразцов горных пород по данным их микротомограммы на основе прямого гидродинамического моделирования, где в качестве базовой математической модели течения жидкости используются системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Практическая значимость цифровой модели ядра (ЦМЯ) заключается в возможности проведения множественных (воспроизводимых) экспериментов и полноценных параметрических исследований на одном образце, позволяющие повысить качество и надежность определения свойств пород-коллекторов, воссоздать полный спектр пластовых условий, снизить степень неопределенности результатов лабораторных исследований.

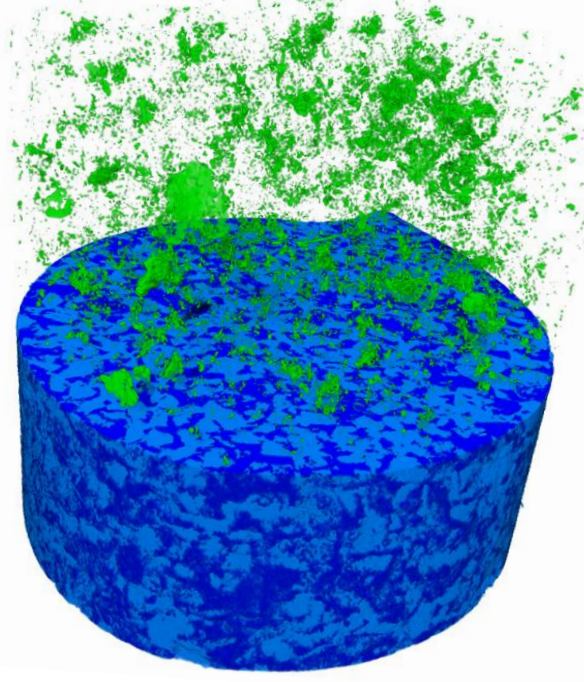


Рисунок 1 – срез порового пространства цифрового ядра.

Разработку математической модели можно разделить на следующие этапы:

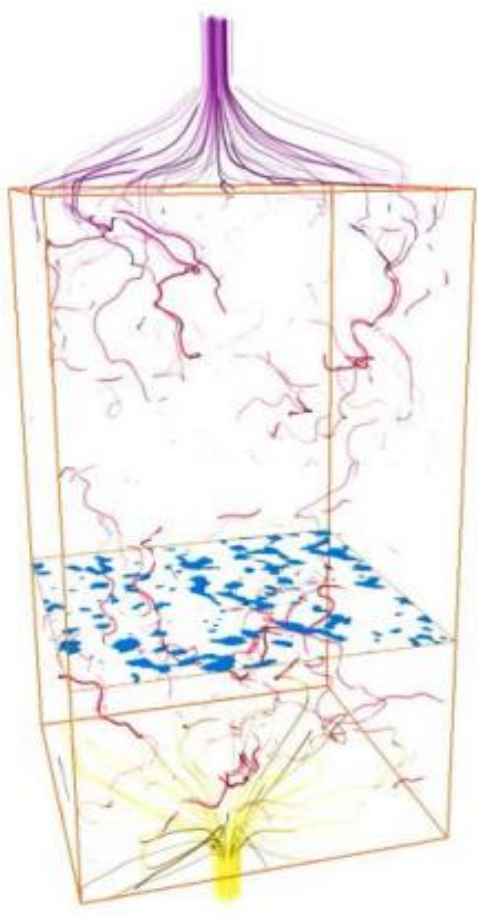


Рисунок 2 – симуляция микротечения сквозь поровое пространство в ПО Thermo Fisher Scientific PerGeos.

1. На основе физической модели, с учетом использования первичного представления порового пространства образцов породы, представленного результатами РМТ, получают количественную информацию путем построения соответствующей ей математической модели – системы дифференциальных уравнений с необходимыми начальными и граничными условиями;
2. Конструируют вычислительный алгоритм, включающий два основных момента: построение дискретной математической модели, то есть аппроксимация исходной (дифференциальной) задачи разностной (дискретной), и разработка эффективного метода решения разностной задачи;
3. Проектируют, пишут и отлаживают программу на ЭВМ;
4. Проводят ряд тестовых расчетов гидродинамических – фильтрационно-емкостных свойств пород-коллекторов, позволяющие судить о правильности и точности работы алгоритма и программы;
5. Проводят сравнение полученных результатов с экспериментальными данными РМТ или расчетами других авторов, на основании которого можно сделать вывод об адекватности выбранной физической модели исследуемому явлению.

При положительной корреляции результатов моделирования с данными РМТ ставится задача по расширению параметров модели.

В качестве примера для такой модели может быть рассмотрен программный комплекс Thermo Fisher Scientific PerGeos, который по подбираемым параметрам в цифровом виде воспроизводит процесс течения жидкости (или газа) сквозь геометрию порового пространства ядерного материала.

Математическая модель при исследовании цифрового ядра, как правило, рассматривается в качестве дополняющего метода к традиционным лабораторным исследованиям.

РЕНТГЕНОВСКАЯ МИКРОТОМОГРАФИЯ

Определяющие характеристики процесса течения флюидов в пористых средах в основном зависят от морфологии порового пространства. Компьютерная томография высокого разрешения позволяет представить сложную геометрию порового пространства с помощью цифровых моделей с различным уровнем детализации (рис. 3). Виртуальные исследования течения флюидов в порах проводят на бинаризованной модели, в которой воксели, соответствующие фазе порового пространства, имеют значение 0, а воксели, соответствующие фазе матрицы, значение 1.

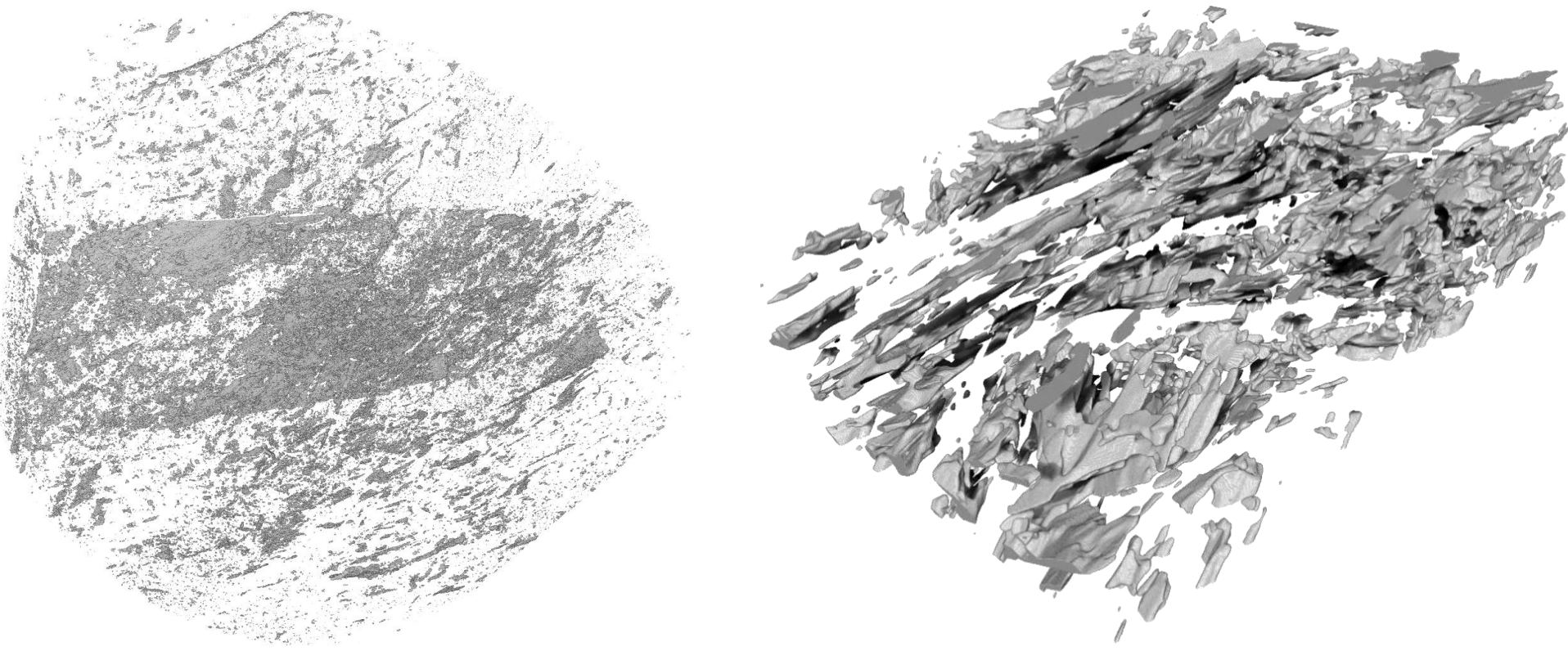


Рисунок 3 – Визуализация трёхмерной модели порового пространства.

Появление высокопроизводительных вычислительных систем и последние достижения в методах анализа 3D изображений сделали возможным использовать сложную морфологию реального порового пространства для исследования сложных физических процессов течения флюидов в масштабе пор. Интеграция рентгеновской микротомографии с численным моделированием дают возможность проводить множество неразрушающих исследований в короткие сроки.

СИСТЕМА КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В качестве базовой математической модели для решения задачи гидродинамического моделирования процессов микротечений жидкости сквозь геометрию порового пространства ядерного материала может быть рассмотрена модель на основе квазигидродинамической системы уравнений, которая обобщает систему уравнений Навье-Стокса и отличается от нее дополнительными диссипативными слагаемыми. Как показывают современные исследования, на базе квазиуравнений можно построить конечно-разностные алгоритмы расчета вязких нестационарных течений газа и жидкости.

Квазигидродинамическая (КГид) система уравнений была выведена из интегральных законов сохранения Шеретовым Ю.В. Она вытекает из квазигазодинамических (КГД) уравнений, которые были впервые построены в 80-х гг. XX в. Т.Г. Елизаровой и Б.Н. Четверушкиным, в качестве первого дифференциального приближения кинетически согласованного разностного алгоритма для решения уравнений газовой динамики. КГид и КГД системы уравнений являются диссипативными, то есть выполняют условия сохранения энергии и баланса энтропии. КГид и КГД подходы могут быть использованы для моделирования двумерных и трехмерных многокомпонентных течений. Особой популярностью пользуются КГид модели при моделировании турбулентных течений.

КГид система с учетом внешних массовых сил для описания течения вязкой несжимаемой жидкости может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{j}_m \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \rho \cdot \vec{F} + \operatorname{div} \Pi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[\vec{j}_m \left(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \operatorname{div} \vec{q} = (\vec{j}_m \cdot \vec{F}) + \operatorname{div} (\Pi \cdot \vec{u}). \quad (3)$$

Система рассматривается в цилиндрической области $Q = G \times (0, T)$, $G \subset R^3$.

Здесь $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ – скорость, $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ – плотность среды, $p = p(\vec{x}, t)$ – давление, $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}, t)$ – удельная внутренняя энергия, $T = T(\vec{x}, t)$ – температура, $s = s(\vec{x}, t)$ – удельная энтропия, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ – массовая плотность внешних сил, $\rho_s = \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t}$ – приближенное значение плотности в точке $(\vec{x}, t + \tau)$, где $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$ – для случая вязкой несжимаемой жидкости. Символ \otimes – используется для обозначения операции прямого тензорного произведения. Символы div и $\vec{\nabla}$ определяют операции дивергенции и градиента соответственно.

Величины $\vec{j}_m = \vec{j}_m(\vec{x}, t)$, $\Pi = \Pi(\vec{x}, t)$ и $\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}, t)$ интерпретируются как вектор плотности потока массы, тензор вязких напряжений и вектор теплового потока соответственно, вычисляются по формуле:

$$\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w}), \quad (4)$$

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho} [\operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p - \rho \vec{F}]. \quad (5)$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \vec{u} \otimes [\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p - \rho \vec{F}] + \tau [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + \eta \operatorname{div} \vec{u}], \quad (6)$$

$$\vec{q} = \vec{q}_{NS} - \tau \eta [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\varepsilon + \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})(1/\rho)], \quad (7)$$

Где Π_{NS} и \vec{q}_{NS} – тензор вязких напряжений и вектор теплового потока Навье-Стокса:

$$\Pi_{NS} = \eta [(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T - (2/3)I \operatorname{div} \vec{u}], \quad (8)$$

$$\vec{q}_{NS} = -\kappa \vec{\nabla} T, \quad (9)$$

Если предположить, что течение жидкости осуществляется в пределах замкнутого сосуда V_0 с не проводящей тепло стенкой Σ_0 , тогда начальные и граничные условия задачи могут быть следующими:

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0, \quad \vec{x} \in V_0, \quad (10)$$

$$\vec{u}|_{\Sigma_0} = 0, \quad (\vec{j}_m \cdot \vec{n})|_{\Sigma_0} = 0, \quad (\vec{q} \cdot \vec{n})|_{\Sigma_0} = 0, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Здесь $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ – заданное значение скорости в момент времени $t=0$. Первое из условий (11) означает, что газ прилипает к стенкам сосуда; второе – обеспечивает отсутствие потока массы через границу; третье – влечет равенство к нулю на Σ_0 нормальной составляющей теплового потока.

Система КГид уравнений для *слабосжимаемой жидкости* имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \quad (12)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \cdot \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \rho \cdot \vec{F} + 2\eta \cdot \operatorname{div} \vec{\sigma} + \rho \cdot \operatorname{div}[(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})]. \quad (13)$$

Тензор скоростей деформаций имеет $\vec{\sigma}$ вид:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T]. \quad (14)$$

Плотность ρ , коэффициент динамической вязкости η и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами.

Вектор \vec{w} определяется с помощью выражения:

$$\vec{w} = \tau [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{F}]. \quad (15)$$

Линеаризованная система КГид уравнений (12)-(13) на решении u_0 и ρ_0 имеет вид:

$$\operatorname{div}(v - w_0) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\rho \partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(u_0 - \vec{w}_0) \otimes v) + \operatorname{div}(\rho(v - w_0) \otimes u_0) + \vec{\nabla} p = \rho F + \operatorname{div}(\rho(u_0 \otimes w_0)) + \operatorname{div}(v \otimes \vec{w}_0), \quad (17)$$

Векторы w_0 и \vec{w}_0 связанные с вектором плотности теплового потока $\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w})$ вычисляются с помощью выражений:

$$w_0 = \frac{\tau}{\rho} [\rho(u_0, \vec{\nabla})v + \rho(v, \vec{\nabla})u_0 + \vec{\nabla} p], \quad (18)$$

$$\vec{w}_0 = \frac{\tau}{\rho} [\rho(u_0, \vec{\nabla})u_0 + \vec{\nabla} p - \rho F] \quad (19)$$

Для решения начально-краевых задач для линеаризованной системы (17) имеет место априорные оценки решения.

При соответствующих условиях на данные имеет место теория о существовании и единственности решения начально-краевой задачи для системы (16)-(17) в пространствах Соболева.

Обобщенная разрешимость первой начально-краевой задачи.

Систему (12)-(13) можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \quad \vec{w} = \tau [(\vec{u}, \vec{\nabla})\vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{F}], \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times G, \quad G \subset R^3 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{w}, \vec{\nabla})\vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{F} + \mu \Delta \vec{u} + \mu \vec{\nabla}(\operatorname{div} \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{\nabla})\vec{w} + \vec{w} \operatorname{div} \vec{u}, \quad \mu = \frac{\eta}{\rho}.$$

Начальные и граничные условия задачи:

$$\vec{u}|_t=0 = \vec{u}_0, \quad \vec{w} \cdot \vec{n}|_s = 0, \quad \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x), \quad \int_G p(t, x) dx = 0. \quad (21)$$

Если первое и второе уравнение системы (20) умножить на функции φ и $\vec{\psi}$ соответственно, а затем проинтегрировать по G и слагаемое $((\vec{u}, \vec{\nabla})\vec{w})$ проинтегрировать по частям, получим равенства:

$$(\vec{u}, \nabla \varphi) = (\vec{w}, \nabla \varphi), \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi} \right) - ((\vec{u} - \vec{w}, \vec{\nabla})\vec{u}, \vec{\psi}) + \frac{1}{\rho} (\nabla p, \vec{\psi}) + \mu (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{\psi}) + \mu (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{\psi}) + ((\vec{u}, \vec{\nabla})\vec{w}, \vec{\psi}) = (\vec{F}, \vec{\psi}).$$

Равенства (22) может служить основой для определения обобщенного решения задачи.

Функции $\vec{u} \in L_2(0, T; W_2^1(G)) \cap L_\infty(0, T; L_2(G))$, $\vec{u}_0 \in L_{p_0}(0, T; W_{p_0}^{-1}(G))$ и $p \in L_{p_1}(0, T; W_{p_1}^1(G))$ такие, что $\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \vec{\nabla})\vec{u} \in L_2(Q)$, удовлетворяющие (21), называются обобщенным решением задачи (20), (21), если:

$$\int_0^T (\vec{u}, \nabla \varphi) dt = \int_0^T (\vec{w}, \nabla \varphi) dt, \quad \int_0^T \left[\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi} \right) - ((\vec{u} - \vec{w}, \vec{\nabla})\vec{u}, \vec{\psi}) + \frac{1}{\rho} (\nabla p, \vec{\psi}) + \mu (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{\psi}) + \mu (\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{\psi}) + ((\vec{u}, \vec{\nabla})\vec{w}, \vec{\psi}) \right] dt = \int_0^T (\vec{F}, \vec{\psi}) dt \quad (22)$$

для всех функций $\varphi \in L_2(0, T; W_2^1(G)) \cap C \int_G \varphi(t, x) dx = 0$, $\vec{\psi} \in L_2(0, T; W_2^1(G))$ и $\vec{\psi}|_s = 0$.

Получаемые априорные оценки для слагаемых, входящие в определение обобщенного решения (22), имеют вид:

$$\|\vec{u}\|_{L_2(0, T; W_2^1(G))} + \|\operatorname{div} \vec{u}\|_{L_2(Q)} + \left\| \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \vec{\nabla})\vec{u} \right\|_{L_2(Q)} \leq C_1, \quad (23)$$

$$\|\nabla p\|_{L_{p_0}(0, T; L_{p_0}(G))} + \|(\vec{u}, \vec{\nabla})\vec{u}\|_{L_{p_0}(0, T; L_{p_0}(G))} \leq C_2, \quad (24)$$

$$\|u\|_{L_{p_1}(0, T; W_{p_1}^{-1}(G))} \leq C_3, \quad (25)$$

где $C_{1,2,3}$ – некоторые постоянные.

При определенных условиях на данные КГид системы уравнений, существует обобщенное решение первой начально-краевой задачи и его можно найти как предел приближенных решений, вычисляемых по методу Галёркина, с использованием априорных оценок.

Вопрос о существовании и единственности регулярного решения первой начально-краевой задачи для КГид системы уравнений остается открытым.

Результаты работ, посвященные разрешению аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости, опубликованы в научных журналах Scopus и WoS.

ПРЕДПОЛАГАЕМЫЕ ЭТАПЫ РАБОТ

